Suite de Fibonacci

Notions abordées : Arithmétique – Espaces vectoriels et applications linéaires

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Cette suite est appelée suite de Fibonacci.

Partie I

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n-1$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2.a Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ (appelée relation de Simson).

2.b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n et u_{n-1} sont premiers entre eux.

3.a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p$.

3.b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$.

3.c Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ alors $\text{pgcd}(u_a, u_b) = \text{pgcd}(u_b, u_r)$.

3.d En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide, établir $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_n, u_p) = u_{\text{pgcd}(n,p)}$.

Partie II

On note E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites réelles (a_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi((a_n)) = (a_0, a_1)$.
Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espace vectoriel .
En déduire $\dim E$.

3.a Pour quels $q \in \mathbb{R}$ les suites (q^n) appartiennent-elles à E ?
On notera q_1 et q_2 les deux solutions trouvées.

3.b Montrer que les suites (q_1^n) et (q_2^n) forment une base de E.

3.c En déduire l'expression du terme général de la suite de Fibonacci.

Correction

Partie I

1. Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0, u_0 = 0 \geq -1$, pour $n = 1, u_1 = 1 \geq 0$, pour $n = 2, u_2 = 1 \geq 1$ et pour $n = 3, u_3 = 2 \geq 2$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$ et $n+1$:
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \underset{HR}{\geq} n + (n-1) = 2n-1 = n + (n-1) \geq n+1$ puisque $n \geq 2$.
Récurrence établie. Clairement $u_n \to +\infty$.

2.a Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1, u_2u_0 - u_1^2 = -1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} \underset{HR}{=} -(-1)^n = (-1)^{n+1}$
Récurrence établie

2.b Pour $U = (-1)^n u_{n+1}$ et $V = (-1)^{n+1}u_n$ on a :
$u_{n-1}U + u_nV = 1$ et par cette égalité de Bézout : $u_{n-1} \wedge u_n = 1$.

3.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p = u_0.u_{p-1} + u_1 u_p$ car $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+1+p} = u_{n+(p+1)} = u_n u_p + u_{n+1} u_{p+1}$ donc

$u_{n+1+p} - (u_{n+1}u_{p-1} + u_{n+2}u_p) = (u_n - u_{n+2})u_p + u_{n+1}(u_{p+1} - u_{p-1}) = -u_{n+1}u_p + u_{n+1}u_p = 0$

Récurrence établie.

3.b Posons $d = \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p)$ et $\delta = \text{pgcd}(u_n, u_p)$.

On a $\delta \mid u_n$ et $\delta \mid u_p$ donc $\delta \mid u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$.

Ainsi $\delta \mid u_p$ et $\delta \mid u_{n+p}$ donc $\delta \mid d$.

Inversement, on a $d \mid u_p$ et $d \mid u_{n+p}$ donc $d \mid u_n u_{p-1} = u_{n+p} - u_{n+1} u_p$.

Or $d \mid u_p$ et $u_p \wedge u_{p-1} = 1$ donc $d \wedge u_{p-1} = 1$.

Puisque $d \mid u_n u_{p-1}$ et $d \wedge u_{p-1} = 1$ on a $d \mid u_n$.

Ainsi $d \mid u_n$ et $d \mid u_p$ donc $d \mid \delta$.

Par double divisibilité : $d = \delta$.

3.c $\text{pgcd}(u_{n+2p}, u_p) = \text{pgcd}(u_{(n+p)+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$

Par récurrence, on obtient que $\forall q \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(u_{n+qp}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$.

Ainsi, si r est le reste de la division euclidienne d'un entier $a \in \mathbb{N}$ par un entier $b \in \mathbb{N}^*$ on a :
$\text{pgcd}(u_a, u_b) = \text{pgcd}(u_b, u_r)$ (en prenant $n = r$, $b = p$ et $a = qb + r$; sachant $q \in \mathbb{N}$).

3.d Suivons l'algorithme d'Euclide calculant $n \wedge p$:

On pose $a_0 = n$, $a_1 = p$, puis on réalise les divisions euclidiennes suivantes tant que les restes obtenus sont non nuls :

$a_0 = a_1 q_1 + a_2$, $a_1 = a_2 q_2 + a_3, \ldots$, $a_{m-2} = a_{m-1} q_{m-1} + a_m$ puis $a_{m-1} = a_m q_m + 0$ avec $a_m = \text{pgcd}(n, p)$.

Or, de part 3.c, on obtient

$\text{pgcd}(u_n, u_p) = \text{pgcd}(u_{a_0}, u_{a_1}) = \text{pgcd}(u_{a_1}, u_{a_2}) = \ldots = \text{pgcd}(u_{a_m}, u_0) = \text{pgcd}(u_{a_m}, 0) = u_{a_m}$,

d'où le résultat voulu.

Partie II

1. $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite nulle (0) vérifie la relation de récurrence et appartient donc à E.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(a_n), (b_n) \in E$.

$\alpha.(a_n) + \beta.(b_n) = (\alpha a_n + \beta b_n)$ et

$\forall n \in, \alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2} = \alpha(a_{n+1} + a_n) + \beta(b_{n+1} + b_n) = (\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) + (\alpha a_n + \beta b_n)$

donc $\alpha.(a_n) + \beta.(b_n) \in E$.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(a_n), (b_n) \in E$.

$\varphi(\alpha.(a_n) + \beta.(b_n)) = (\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1) = \alpha\varphi((a_n)) + \beta\varphi((b_n))$

donc φ est une application linéaire.

Soit $(a_n) \in \ker\varphi$.

On a $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$.

Par récurrence double, on montre $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ puisque $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Ainsi $\ker\varphi = \{(0)\}$ et donc φ est injective.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour (a_n) définie par $a_0 = x$, $a_1 = y$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, la suite (a_n) est bien définie, elle est élément de E et on a $\varphi((a_n)) = (x, y)$. Ainsi φ est surjective.

Finalement φ est bijective et c'est donc un isomorphisme de R - espace vectoriel .

Il en découle $\dim E = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

3.a $(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathrm{N}, q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \Leftrightarrow q^2 = q + 1$

Les solutions de cette dernière équation sont $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3.b Les suites (q_1^n) et (q_2^n) sont éléments de E .

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons $\alpha(q_1^n) + \beta(q_2^n) = (0)$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha q_1^n + \beta q_2^n = 0$.

Pour $n = 0$, on obtient $\alpha + \beta = 0$ d'où $\beta = -\alpha$

Pour $n = 1$, on obtient $\alpha q_1 + \beta q_2 = 0$ ce qui donne $\alpha(q_1 - q_2) = 0$.

Puisque $q_1 \neq q_2$, on conclut $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$.

La famille $((q_1^n),(q_2^n))$ est une famille libre formée de $2 = \dim E$ éléments de E , c'est donc une base de E .

3.c Puisque $(u_n) \in E$: $\exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (u_n) = \alpha.(q_1^n) + \beta.(q_2^n)$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.q_1^n + \beta.q_2^n$.

Pour $n = 0$, on obtient $\alpha + \beta = 0$ d'où $\beta = -\alpha$.

Pour $n = 1$, on obtient $\alpha q_1 + \beta q_2 = 1$ d'où $\alpha = \dfrac{1}{q_1 - q_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ainsi $\forall n \in \mathrm{N}, u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$.